



Analyse Fractale : une nouvelle génération d'outils pour le Traitement du Signal

Jacques Lévy Véhel

► To cite this version:

Jacques Lévy Véhel. Analyse Fractale : une nouvelle génération d'outils pour le Traitement du Signal. Revue des Sciences et Technologies de l'Information - Série TSI : Technique et Science Informatiques, 2000, 19 (1-3), pp.335-350. inria-00578649

HAL Id: inria-00578649

<https://inria.hal.science/inria-00578649>

Submitted on 21 Mar 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse Fractale : une nouvelle génération d'outils pour le Traitement du Signal

Jacques Lévy Véhel

IRCYN	INRIA - Projet Fractales
UMR 6597	Domaine de Voluceau
B.P. 92101	B.P. 105
44321 Nantes Cedex 03	78153 Le Chesnay Cedex
http://www-rocq.inria.fr/fractales	

RÉSUMÉ. Récemment, plusieurs développements importants en analyse fractale ont eu un impact majeur sur les applications en traitement du signal. Nous abordons brièvement la théorie des systèmes de fonctions itérées, l'analyse multifractale, et les processus stables fractionnaires, en expliquant comment des progrès dans ces divers champs ont conduit à de nouvelles méthodes en traitement des images (compression, watermarking, segmentation, débruitage, ...), analyse financière, et modélisation du trafic sur les réseaux informatiques. Ces applications, parmi d'autres, montrent que l'analyse fractale est résolument passée depuis quelques années du "stade descriptif" au "stade opérationnel".

ABSTRACT. Recently, a number of important progresses in fractal analysis have had a major impact in signal processing applications. We review briefly IFS theory, multifractal analysis and stable fractional processes theory; we indicate how these theoretical tools lead to new methods for image processing (segmentation, denoising, compression), financial analysis, and internet traffic modeling. Among others, these applications show that fractal analysis is no longer restricted to a descriptive role, but has entered an operational phase.

MOTS-CLÉS : analyse fractale, traitement du signal, multifractal, IFS, processus stables, segmentation d'images, compression, débruitage, analyse financière, trafic internet.

KEY WORDS : fractal analysis, signal processing, multifractal, IFS, stable processes, image segmentation, compression, denoising, financial analysis, internet traffic.

1. Géométrie fractale : origines et évolution

La géométrie fractale, apparue dans les années 70 [21] comme fruit d'une synthèse de travaux effectués en mathématiques et en physique depuis plus d'un siècle [28, 13, 26, 15], a proposé de nouveaux concepts pour appréhender certains phénomènes complexes. Les notions de dimension fractionnaire et d'invariance d'échelle¹

1. une propriété est dite invariante d'échelle (dans une certaine gamme de résolutions) si elle ne possède pas d'échelle caractéristique dans la gamme considérée. En d'autres termes, on ne peut pas connaître l'échelle d'observation en mesurant cette propriété. Analytiquement, et dans le cas plus simple où cette

ont rapidement été reconnues pertinentes pour la description de nombreux objets naturels, des reliefs montagneux [25] aux amas de percolation en passant par les fronts de diffusion [14], les milieux poreux [1] ou la catalyse chimique [2]. Ces outils ont par exemple permis de mieux comprendre les phénomènes de croissance loin de l'équilibre qui apparaissent de manière spontanée dans de nombreux domaines, comme le claquage diélectrique ou la croissance dendritique. Les physiciens, les chimistes ou les astronomes ont ainsi pu disposer de nouvelles mesures quantitatives pour caractériser les objets qu'ils étudient : la dimension d'un amas obtenu par agrégation diffusive de particules, par exemple, est différente de celle d'un amas obtenu par agrégation balistique.

Les applications en traitement du signal et plus généralement en sciences de l'information ne sont apparues que plus tardivement, vers le début des années 80. Une caractéristique des premières tentatives est la vision essentiellement descriptive qui y était à l'œuvre : des signaux étaient analysés et des comportements fractals étaient ou non relevés, le plus souvent sous la forme d'une invariance d'échelle dans une certaine gamme de résolutions. On en déduisait une "dimension fractale", et les développements s'arrêtaient là. Cette phase descriptive était très certainement nécessaire, et elle a en tout cas permis de se familiariser avec des notions nouvelles à l'époque. Cependant, elle a aussi, un temps, donné l'impression que si la géométrie fractale pouvait offrir aux sciences de l'ingénieur une description compacte et "intelligente" de certains phénomènes, elle ne permettait pas de créer des procédés opératoires nouveaux.

Deux importantes évolutions de nature différente ont permis d'entrer dans une phase "opérationnelle" au début des années 90. La première, qui s'inscrit naturellement dans les développements d'une discipline jeune, est l'enrichissement des outils de base de la théorie en vue des applications à la variété des phénomènes naturels : à la caractérisation, somme toute assez pauvre, d'un signal par sa seule "dimension fractale", sont venus s'ajouter des mesures beaucoup plus fines, comme la lacunarité ou l'analyse multifractale ; les modèles de processus fractals, d'abord parfaitement auto-similaires, se sont diversifiés pour tenir compte d'invariances dans des sens généralisés ; enfin, les méthodes statistiques d'analyse des signaux fractals se sont perfectionnées pour fournir des estimateurs plus robustes et applicables dans des situations plus générales. Nous exposerons très brièvement certains de ces développements dans la suite de l'article.

La deuxième évolution est d'essence plus conceptuelle, et, semble-t-il, particulière à nos domaines. Au lieu de continuer à rechercher des phénomènes "fractals" (c'est-à-dire invariants d'échelle) et à décrire cette invariance à l'aide de diverses dimensions, on s'est progressivement rendu compte du bénéfice qu'il pouvait y avoir à appliquer des *outils fractals* à des signaux *a priori quelconques*. Autrement dit, au lieu d'analyser un signal pour savoir s'il est un *objet fractal*, on lui fait subir des *traite-*

invariance prend la forme d'une auto-similarité, cela se traduit par une relation en loi de puissance entre la résolution d'analyse ϵ et la propriété $P(\epsilon)$ mesurée à cette résolution : $P(\epsilon) = F(\epsilon) \times \epsilon^\alpha$, où $F(\epsilon)$ est une fonction à variation lente. Cette invariance d'échelle est le plus souvent mise en évidence à travers un comportement linéaire dans un diagramme $\log(P)$ vs. $\log(\epsilon)$.

ments fractals indépendamment de sa possible invariance d'échelle. Le traitement des images fournit un exemple frappant de ce changement de point de vue : on ainsi affaire à de la *compression fractale* des images, et non pas à de la compression *d'images fractales* (les images incluses dans l'encyclopédie Encarta de Microsoft ne sont certes pas fractales, mais ont été stockées sur CD-Rom sous une forme compressée par une méthode fractale). Il en est de même pour la segmentation, le débruitage, ou encore le watermarking : on traite des images *quelconques*, et ce sont les *méthodes* qui sont *fractales*. Cette évolution importante surprendra moins si on la met en parallèle avec la manière dont on utilise des méthodes plus classiques ; en effet, elle consiste simplement à user de l'analyse fractale comme on le fait habituellement des autres outils mathématiques en sciences de l'ingénieur : moyennant certaines hypothèses, on peut toujours calculer le gradient d'un signal discret (par exemple *via* un modèle, ou en le régularisant au préalable), ou sa transformée de Fourier (par exemple en le prolongeant de manière adéquate en dehors du domaine où il est observé). De même, on calculera des dimensions ou un spectre multifractal associés à un signal en faisant des hypothèses sur celui-ci. Ces dernières sont d'ailleurs en général de nature semblable à celles faites dans les analyses "classiques", à savoir principalement : appartenance à une classe de modèles, et "régularisation" ou "prolongement" du signal (dans les échelles plutôt qu'en espace).

Nous développons ci-dessous quelques exemples de cette approche, qui a permis aux méthodes fractales de faire désormais partie intégrante de certains procédés industriels. Le reste de ce papier présente succinctement trois développements théoriques relativement récents accompagnés chaque fois d'une ou deux applications : IFS et compression d'images ; analyse multifractale et traitement d'images ; processus stables fractionnaires, analyse financière et trafic sur les réseaux.

2. IFS et compression d'images

Un IFS, où système de fonctions itérées, est la donnée, sur un espace métrique complet (X, d) d'un ensemble de n fonctions $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Si chaque w_i est contractant pour d , alors l'opérateur W :

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H \\ A &\mapsto \cup_i w_i(A). \end{aligned}$$

où H est l'ensemble des sous-ensembles compacts non vide de X , est lui-même contractant dans (H, d_H) où d_H est la distance de Hausdorff,

$$d_H(A, B) = \max \left(\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x, y) \right)$$

W possède donc un unique point fixe G , appelé *attracteur* de l'IFS. G possède une forme d'invariance d'échelle, puisque, en vertu de l'équation $G = \cup w_i(G)$, il est égal à l'union de copies réduite de lui-même (figure 1). De plus, et c'est la propriété qui

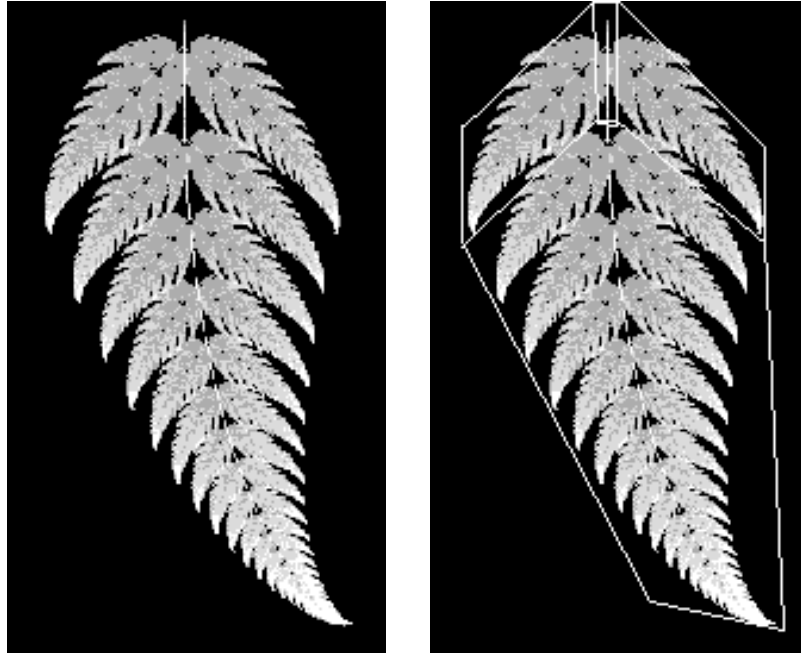


Figure 1. Une “fougère fractale”, attracteur d’un IFS. La forme complète est l’union des quatre sous-parties délimitées par un cadre dans l’image de droite, chacune de ces parties étant elle-même une réduction affine du tout.

nous intéresse pour la compression, G est totalement déterminé dès que l’on connaît $\{w_1, \dots, w_n\}$, et il existe un algorithme rapide pour le calculer.

Choisissons maintenant pour H l’ensemble des images sur un domaine fixé, et soit A une image particulière. Si l’on arrive à déterminer un IFS dont l’attracteur est A , alors, au lieu de conserver A en mémoire, il suffira de stocker l’IFS. On obtient ainsi une représentation *fonctionnelle* de l’image, qui est en général beaucoup plus compacte que l’information originale. Notons que cette méthode de compression est conceptuellement très différente des méthodes classiques, qui, elles, cherchent un espace de représentation permettant de supprimer ou de diminuer le plus possible les redondances.

La problématique de la compression fractale est donc, pour une image donnée A , de trouver un IFS dont l’attracteur soit le plus proche possible de A . L’algorithme de base consiste à partitionner d’abord A en blocs destination. Pour chacun de ces blocs, on cherche ensuite, toujours dans A , un bloc “source”, qui, par une transformation contractante simple (translation et rotation spatiale, changement d’échelle, modification du contraste et du niveau de gris moyen) donne une bonne approximation du bloc destination.

Quand tous les blocs destination ont été traités, on a obtenu un ensemble de fonc-

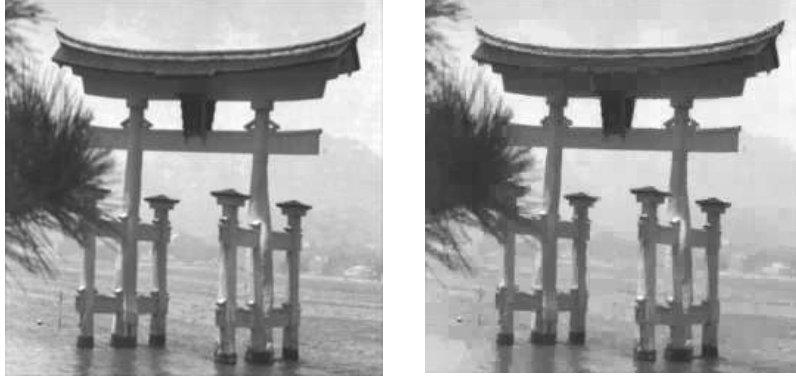


Figure 2. Image originale et compression d'un facteur 50.

tions contractantes qui constitue un IFS dit “partitionné” dont l’attracteur approxime A . On peut ainsi atteindre des taux de compression importants en conservant une bonne qualité d’image (figure 2).

Cet algorithme, apparu il y a une dizaine d’années, a donné naissance à une très abondante littérature [12], mais aussi à de nombreuses implémentations industrielles. La société américaine Image Tech, en particulier, commercialise plusieurs codeurs/décodeurs fractals fonctionnant sur ce principe pour des images fixes ou animées.

Des généralisations de cette théorie permettent entre autres de réaliser de la synthèse vocale, de faire de la génération interactive d’images ou du watermarking.

3. Analyse multifractale et applications en traitement d’images

L’analyse multifractale d’un signal consiste essentiellement à le décomposer en sous-ensembles ayant même régularité, puis à mesurer la “taille” des sous-ensembles ainsi obtenus. Plus précisément, on commence par se donner une définition adéquate de la régularité du signal X en un point quelconque t : le plus couramment, on a recours à l’exposant de Hölder ponctuel, $\alpha_X(t)$, défini comme suit :

$$\alpha_X(t) = \liminf_{v \rightarrow t} \frac{\log |X(v) - X(t)|}{\log |v - t|}. \quad [1]$$

(cette définition est valable si X est non dérivable en t ; sinon il faut lui enlever sa partie régulière, [16] ; d’autre part, elle s’étend sans difficulté en dimension supérieure).

Géométriquement, (1) signifie que le graphe de X autour de t “ressemble” à une courbe du type $v \rightarrow X(t) + C|v - t|^\alpha$, dans le sens suivant : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage de t tel que le graphe de X dans ce voisinage soit tout entier inclus dans l’enveloppe définie par les deux courbes $v \rightarrow X(t) + C|v - t|^{\alpha-\epsilon}$ et $v \rightarrow X(t) - C|v - t|^{\alpha-\epsilon}$, cette propriété n’étant plus vraie si on choisit $\epsilon < 0$ (figure 3).

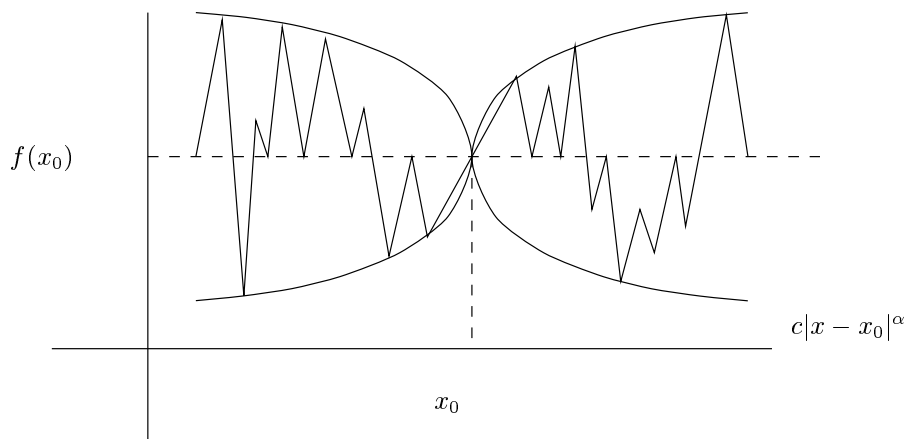


Figure 3. Signal irrégulier X et son enveloppe Hölderienne en un point t_0 .

L'exposant α_X étant défini en tout t , on peut associer au signal original sa *fonction de Hölder*, $t \rightarrow \alpha_X(t)$, qui décrit comment varie la régularité de X : plus $\alpha_X(t)$ est petit, plus X est irrégulier en t , et inversement. L'information apportée par α_X et ses variations est souvent plus intéressante que celle fournie par X : si l'on veut détecter des contours dans une image, par exemple, la valeur $X(t)$ des niveaux de gris n'est pas pertinente, puisque les contours ne sont pas modifiés si l'on change le contraste ou la luminosité globale de l'image. Par contre, les contours correspondent généralement à des discontinuités ou des variations brusques dans les niveaux de gris, information qui est justement celle enregistrée par α_X .

La deuxième étape d'une analyse multifractale consiste à mesurer les ensembles $E_\alpha = \{t / \alpha_X(t) = \alpha\}$. Ceci peut se faire de diverses manières, par exemple en privilégiant une approche géométrique ou au contraire une approche statistique. Nous ne pouvons développer ici ces aspects, et nous renvoyons à [20] pour les détails. Le résultat est dans tous les cas un *spectre multifractal*, i.e. une fonction $\alpha \rightarrow f(\alpha)$, qui décrit "combien" de points du signal ont une régularité égale à α . Notons que ce spectre est défini sous des conditions très générales, et qu'on ne demande certainement aucune espèce de "fractalité" sur le signal X pour pouvoir le calculer. Ainsi, pour une image quelconque I , on pourra toujours estimer un spectre $f_I(\alpha)$. Voici quelques utilisations possibles de l'analyse multifractale en traitement des images.

Intéressons-nous tout d'abord au cas de la détection de contours. Dans de nombreux cas, ceux-ci peuvent être caractérisés par les deux conditions suivantes : tout d'abord, et comme on l'a noté plus haut, les contours correspondent à des points peu réguliers dans les images, c'est-à-dire à des valeurs relativement faibles de α . D'autre part, on s'attend à ce que tous les contours d'une image forment un ensemble de lignes, donc un ensemble de dimension 1. Ainsi, on pourra extraire les contours d'une image en sélectionnant les points t dont l'exposant α est tel que $f(\alpha) = 1$ (figure 4) [18].

Un deuxième exemple est le débruitage des images. Intuitivement, il est clair que,

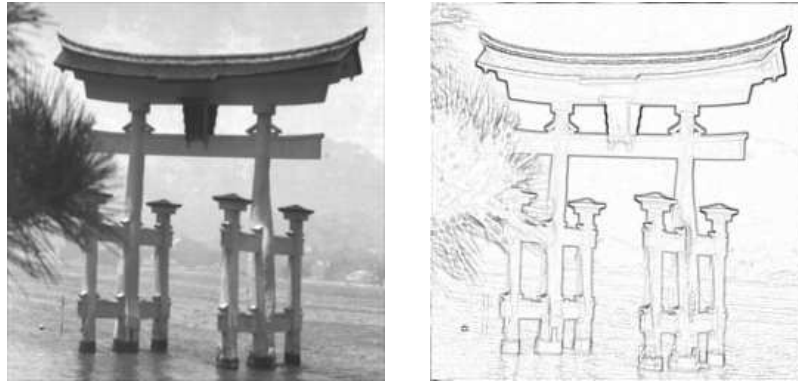


Figure 4. Image originale et contours détectés par analyse multifractale.

dans une scène qui apparaît très bruitée, comme par exemple une image SAR (pour Radar à Ouverture Synthétique), la plupart des points auront une régularité faible, alors qu’une image “lisse” contiendra surtout des valeurs élevées de α . En terme de spectre, $f(\alpha)$ sera “grand” pour α “petit” dans le premier cas, et pour α “grand” dans le deuxième cas. Pour débruiter une image, une possibilité est donc de la modifier de telle sorte que son spectre soit translaté vers les grandes valeurs de α : on augmente la régularité de chaque point en gardant la forme du spectre, ce qui permet de rendre l’image plus lisible tout en conservant la force respective de chaque singularité (c’est-à-dire qu’un point bruité sur un contour restera, après traitement, plus irrégulier qu’un point bruité sur une zone uniforme). Cette méthode permet en particulier de traiter efficacement certaines images SAR qui résistent à la plupart des autres techniques de restauration. Un exemple de débruitage est présenté figure 5.

4. Processus stables fractionnaires et applications en analyse financière

En simplifiant, on peut présenter les processus stables fractionnaires comme une généralisation du classique mouvement Brownien suivant deux directions. En premier lieu, on ne se restreint plus au cadre Gaussien en considérant des processus dont les lois marginales sont des *lois stables*. Rappelons que les lois stables partagent avec la loi Gaussienne la propriété de stabilité par addition : ce sont toutes les lois \mathcal{L} telles que la somme S_N convenablement renormalisée de N variables aléatoires, indépendantes et identiquement distribuées suivant \mathcal{L} , soit elle aussi distribuée comme \mathcal{L} . Un exemple en est la loi de Cauchy. Exception faite de la Gaussienne, chaque loi stable est principalement caractérisée par un paramètre $\alpha \in]0, 2[$ qui est tel que tous les moments d’ordre $\alpha - \epsilon$ existent pour $\epsilon > 0$, mais les moments d’ordre supérieur ou égal à α n’existent pas. En particulier, ces lois n’ont pas variance bien définie. En conséquence, si par exemple l’on construit un *mouvement stable* sur le modèle du mouvement Brownien en remplaçant l’aléa Gaussien par un aléa stable, on obtiendra un processus dont

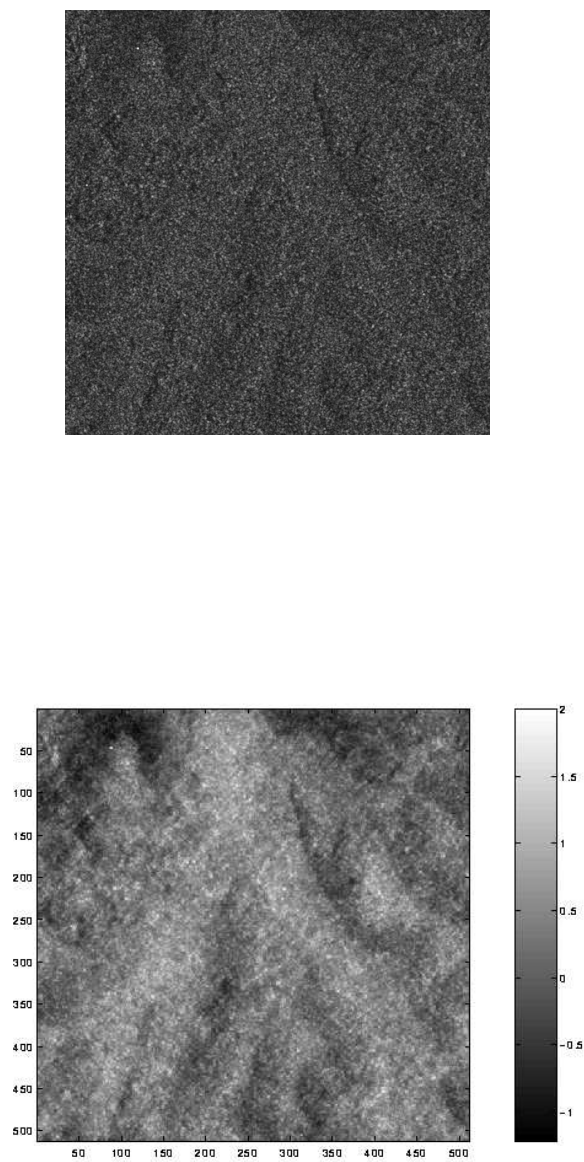


Figure 5. *Image SAR originale et débruitage multifractal.*

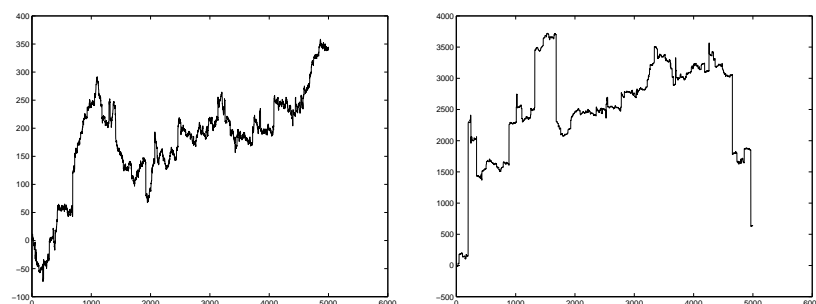


Figure 6. Mouvements stables de paramètres $\alpha = 1.5$ (à gauche) et $\alpha = 1$ (à droite).

les trajectoires sont presque sûrement discontinues (figure 6). Ce même paramètre α contrôle la dimension, qui, pour un mouvement stable, est $\max(1, 2 - 1/\alpha)$.

La discontinuité des trajectoires, alliée à la propriété de stabilité, fait des mouvements stables de bons candidats pour modéliser certains phénomènes très irréguliers, dont en particulier les cours financiers. L'importance de la stabilité dans ce contexte est déjà notée par Bachelier (voir [22]) ; quand à la discontinuité, il suffit d'observer à peu près n'importe quelle chronique boursière pour se rendre compte que, même en l'absence de krach qui ferait chuter brusquement les cours, ceux-ci sont très souvent sujets à des sauts de toutes tailles : ce comportement est caractéristique des trajectoires des mouvements stables (figure 7). Plus quantitativement, de nombreux tests statistiques depuis les années 70 ont montré que certaines chroniques se prêtent effectivement bien à ce type de modélisation [22, 11]. Récemment, et grâce en particulier à des progrès théoriques, on a pu proposer de nouveaux outils d'ingénierie financière fondés sur ces modèles. Par exemple, si l'on admet que les cours n'ont effectivement pas de variance, le concept de *risque*, central en analyse financière, et qui est défini à partir de la variance, doit être complètement repensé : [5] propose d'utiliser pour cela la *covariation*, et bâtit sur cette nouvelle notion un CAPM (Capital Asset Pricing Model) "stable" qui est plus pertinent que sa contrepartie gaussienne classique. D'autres raffinements proposés par exemple par la société suisse Olsen [24] conduisent à des outils maintenant largement utilisés par la communauté internationale.

La deuxième extension du mouvement Brownien qui mène à des processus fractals consiste à introduire des corrélations fortes dans les accroissements. Dans le cas le plus simple, on conserve la gaussianité et la stationnarité des accroissements, mais on abandonne le caractère Markovien du mouvement Brownien, pour définir le *mouvement Brownien fractionnaire* [23]. Ce dernier est caractérisé par un exposant $H \in]0, 1[$ qui gouverne la plupart de ses propriétés statistiques et fractales : quand $H < 0.5$, chaque accroissement est négativement corrélé avec tous les autres, alors que pour $H > 0.5$, la densité spectrale des accroissements tend vers l'infini à l'origine (le cas $H = 0.5$ est celui du mouvement Brownien standard) : cette seconde situation correspond à ce que l'on nomme communément la "mémoire longue", terme signifiant que les corrélations du processus décroissent "lentement", i.e. en loi de puissance, au lieu des

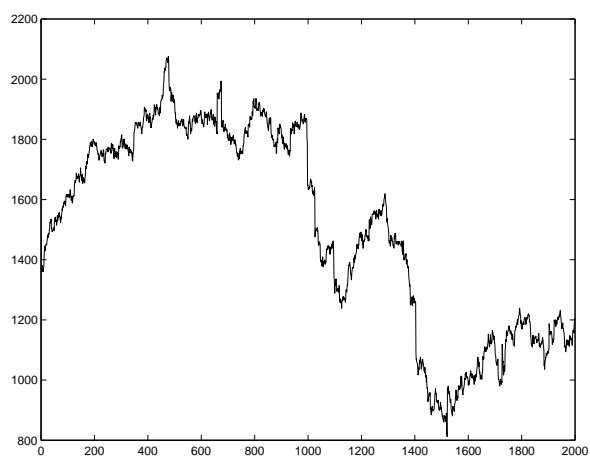
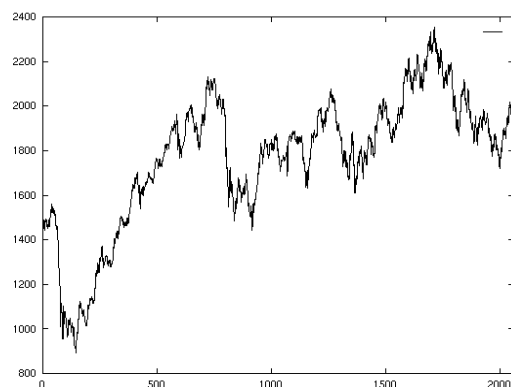


Figure 7. *Indice CAC40 (prix quotidien entre le 9/7/87 et le 31/5/95), en haut, et modélisation par un mouvement stable avec $\alpha = 1.7$, en bas.*

décroissances exponentielles plus classiquement observées. Ce type de corrélation a été relevé dans de nombreux phénomènes naturels et a donné lieu à une abondante littérature [7]. En particulier, et pour revenir à l'application développée ci-dessus, de nombreux marchés financiers ont ce comportement, qui se manifeste dans les chroniques boursières sous la forme de “*cycles*” *apparents* mais n'ayant pas de *durée caractéristique*. Une modélisation plus réaliste des cours combine alors trajectoires discontinues et mémoire longue : on utilise pour cela des *processus stables fractionnaires*, dont les lois marginales sont stables et la structure de corrélation du même type que celle du mouvement Brownien fractionnaire. Nous ne décrivons pas plus avant ce type de processus et concluons ce paragraphe en citant une autre application et extension du mouvement Brownien fractionnaire.

Il s'agit de l'analyse de traces de trafic sur Internet. Au début des années 90, on s'est rendu compte que le trafic de données possède certaines caractéristiques qui le différencient fortement du trafic téléphonique : au contraire des traces relevées sur le réseau téléphonique, qui n'ont pas ou peu de mémoire et sont bien modélisées par des processus de Poisson, les traces Internet sont le siège de phénomènes de mémoire longue et ont un aspect invariant d'échelle. Des modèles à base de mouvement Brownien fractionnaire ont été proposés pour tenter de comprendre cette situation. Des calculs analytiques et des simulations numériques fondés sur ces modèles ont permis de rendre compte de certains des phénomènes observés par exemple sur le trafic Web, et, quelquefois, de proposer des protocoles pour améliorer les temps de transfert [9].

Comme mentionné plus haut, le paramètre H gouverne toutes les propriétés fractales du mouvement Brownien fractionnaire : en particulier, presque sûrement, l'exposant de Hölder en tout point d'une trajectoire est égal à H . Des mesures effectuées sur des données de trafic ont montré au contraire que l'exposant de Hölder varie fortement le long des traces réelles, entraînant en particulier des propriétés multifractales non-triviales [19]. Au moins deux possibilités apparaissent alors pour raffiner la modélisation du trafic. La première consiste à généraliser le mouvement Brownien fractionnaire de façon à ce que son exposant puisse évoluer au cours du temps, tout en conservant autant que possible ses autres propriétés, comme par exemple le caractère gaussien et les corrélations en lois de puissance. On définit ainsi le *mouvement Brownien multifractionnaire*, qui possède une plus grande souplesse et est capable de modéliser une vaste classe de phénomènes [3, 6]. Il permet entre autres de rendre compte de la plupart des propriétés du trafic, et en particulier de son spectre multifractal. Il semble aussi être pertinent pour les applications en finance.

La deuxième modélisation possible du trafic qui est compatible avec les propriétés évoquées ci-dessus est fondée sur l'utilisation de *cascades multiplicatives*, qui sont le paradigme des processus multifractals (figure 8). Nous renvoyons le lecteur intéressé à [19] pour plus de détails sur cette approche.

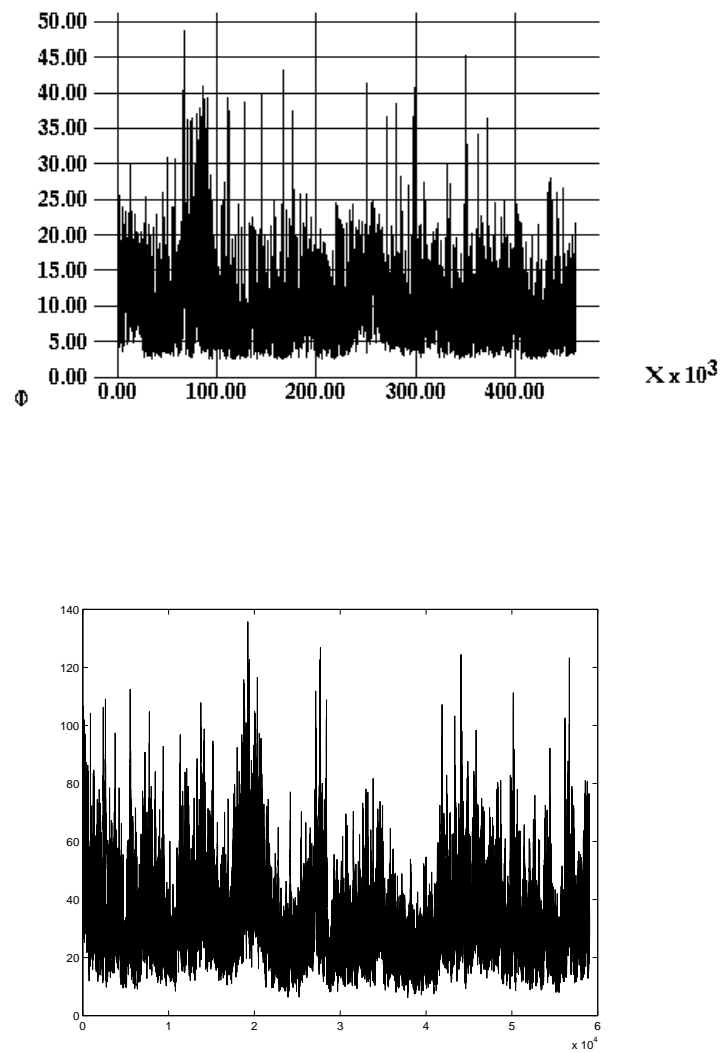


Figure 8. *Trafic TCP (en haut) et modélisation par cascade multiplicative (en bas).*

5. Conclusion

La géométrie fractale est un outil commun à plusieurs domaines, et nous n'avons pas évoqué de nombreuses et récentes avancées importantes en mathématiques (diffusion sur des fractals [4], liens avec l'analyse en ondelettes [16]), physique théorique [10], génie chimique [8], Une mention particulière doit être faite aux progrès extrêmement significatifs accomplis en électrodynamique fractale [17]. Cette discipline nouvelle s'intéresse aux interactions entre des ondes et des structures fractales comme des antennes, des réseaux ou certaines surfaces irrégulières (océan, . . .). Entre autres résultats, ces études ont permis de mettre au point des antennes fractales multibandes. Un procédé de fabrication de telles antennes a d'ailleurs obtenu le grand prix 1998 des technologies de l'information [27].

Les développements ci-dessus montrent que l'analyse fractale fait maintenant partie des outils de base de l'ingénieur, et qu'elle a fourni, au delà des paysages artificiels de *Star Trek*, des méthodes utilisées couramment dans divers domaines industriels.

Références

- [1] P. Adler, *Porous Media: Geometry and Transport*, Butterworth/Heinemann, Stoneham, MA, 1992.
- [2] D. Avnir Ed., *The Fractal approach to Heterogeneous Chemistry*, Wiley, New York, 1989.
- [3] A. Ayache, J. Lévy Véhel, *The Generalized Multifractional Brownian Motion*, Théorème Limites et Longue Mémoire en Statistique, CIRM, Marseille, Novembre 1998.
- [4] M. Barlow, *St Flour Lecture Notes: Diffusions on Fractals*. Lect. Notes Math. 1690, 1997.
- [5] L. Belkacem, J. Lévy Véhel, C. Walter, *Generalized Market Equilibrium: "Stable" CAPM*, AFFI - International Conference of Finance, 1995.
- [6] A. Benassi, S. Jaffard, D. Roux, *Gaussian Processes and Pseudodifferential Elliptic Operators*, Rev. Math. Iberoamericana 13(1), 1997.
- [7] J. Beran, *Statistics for Long Memory Processes*, Chapman and Hall, New York 1994.
- [8] M.-O. Coppens, *Accessibility of a Catalyst's Surface to Diffusing and Reacting Molecules*, Fractals in Engineering, J. Lévy Véhel, E. Lutton, C. Tricot Ed., 1997.
- [9] M. Crovella, A. Bestavros, *Self-similarity in World Wide Web Traffic: evidence and possible causes*, Proc. Sigmetrics, 1996.

- [10] B. Duplantier, *Phys. Rev. Lett.* 82, 880, 1999.
- [11] E.F. Fama, *The Behavior of Stock Market Prices*, Journal of Business, 38, January 1965.
- [12] Y. Fisher, Ed., *Fractal Image Encoding and Analysis*, Springer Verlag, 1996.
- [13] F. Hausdorff, *Dimension und ausseres Mass*, Math. Annalen 79, 1919.
- [14] A. Bunde, S. Havlin, Ed., *Fractals and disordered systems*, Springer-Verlag, 1991.
- [15] H. Hurst, *Long term storage capacity of reservoirs*, Tr. Am. Soc. Civil Eng. 116, 1951.
- [16] S. Jaffard, *Multifractal Formalism for Functions, I and II*, Siam J. Math. Anal. 28 (4), 1997.
- [17] D.L. Jaggard, *Fractal Electrodynamics and Modeling*, in Directions in Electromagnetic Wave Modeling, H. L. Bertoni and L. B. Felsen, editors, Plenum Publishing Co., New York, 435–446, 1991.
- [18] J. Lévy Véhel, *Introduction to the Multifractal Analysis of Images*, in Fractal Image Encoding and Analysis, Yuval Fisher Editor, Springer Verlag, 1996.
- [19] J. Lévy Véhel, R. H. Riedi, *Fractional Brownian motion and data traffic modeling: The other end of the spectrum*, Fractals in Engineering, Eds. J. Lévy Véhel, E. Lutton, C. Tricot, Springer Verlag, 1997.
- [20] J. Lévy Véhel, R. Vojak, *Multifractal Analysis of Choquet Capacities: Preliminary Results*, Adv. in Appl. Math., Vol. 20, No. 1, pp. 1-43, January 1998.
- [21] B.B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Freeman, 1977.
- [22] B.B. Mandelbrot, *Fractals and scaling in finance discontinuity, concentration, risk*, Springer, 1997.
- [23] B. B. Mandelbrot and J. Van Ness, *Fractional brownian motion, fractional noises and applications*, Siam Review Vol. 10, 422–437, 1968.
- [24] Olsen and associates, <http://www.olsen.com>.
- [25] H.O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer, New York, 1986.
- [26] L. F. Richardson, *Weather Prediction by numerical process*, Cambridge Univ. Press, 1922.
- [27] C. Puente, J. Romeu, R. Pous, A. Cardama, *On the behavior of the Sierpinski multiband antenna*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 46, no. 4, pp. 517–524, April 1998.

- [28] K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, Mayer et Muller, Berlin, 1895.